

Les polynômes

Exercice1 : Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes et déterminer si c'est possible leurs degrés : $a \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{3} ; Q(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x}$$

$$R(x) = 5|x^2| + 4|x| - 5 ; M(x) = \frac{5}{3}x^2 + x + 2 - 7x^4$$

$$N(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 3 ; O(x) = 4 ; E(x) = (a-1)x^4 + x^2 + x + 1$$

Exercice2 : Exercice1 : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0) = P(1) = 5$ et $P(-2) = 3$

Exercice3 : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \text{ et } Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) \text{ et}$$

$$R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Exercice4 : soit : $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ et

$$Q(x) = ax^5 + (b+c)x^4 + (c+d)x^3 + dx^2 + e$$

Déterminer $a ; b ; c$ et d pour que : $P = Q$

Exercice5 : soit les polynômes suivants :

$$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$$

$$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

Déterminer $a ; b ; c$ pour que : $P = Q$

Exercice6 : étudier l'égalité des polynômes dans les cas suivants :

$$1) P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x \text{ et } Q(x) = x^2(3x-2) + x$$

$$2) P(x) = (x-1)^3 \text{ et } Q(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

Exercice7 : 1): soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants :

$$P(x) + Q(x) ; P(x) - Q(x) ; 3P(x) - 2Q(x)$$

$$1) P(x) = x^3 + 2x^2 - 1 ; Q(x) = 3x^4 - x^3 + x$$

$$2) P(x) = x^5 - x^2 + 3 ; Q(x) = -x^5 + x^2 - 5$$

II) Calculer $P(x) \times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer :

$$\deg(PQ) \text{ et } \deg(P) + \deg(Q)$$

$$1) P(x) = x^2 - 1 ; Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$2) P(x) = x^4 - x^2 + 2 ; Q(x) = 3x + 2$$

$$\deg(P^2) = 2 \deg(P)$$

Exercice8 : soit le polynôme : $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Est-ce que les nombres suivants sont des racines du polynôme $P(x)$ (justifier) ? 1 ; 2 ; 3 ; -2

Exercice9 : soit le polynôme : $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1) vérifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) factoriser $P(x)$

Exercice10 : soit le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

1) calculer $P(-3)$ et que peut-on dire ?

2) déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x+3)Q(x)$$

Exercice11 : Soit : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) factoriser $P(x)$

Exercice12 : soit le polynôme :

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

1) Effectuer la division euclidienne de

$P(x)$ par $x+2$ et déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste

2) montrer que $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) en déduire une factorisation du polynôme P en polynômes de 1er degré

Exercice13 : Soit : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

1) montrer que 1 est racine du polynôme P

2) montrer que $P(x) = (x-1)Q(x)$

Où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer

3) montrer que -2 est racine du polynôme Q

4) en déduire une factorisation du polynôme P en polynômes de 1er degré

5) résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$

Exercice14 : Soit : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + b$

Avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1) déterminer a et b tels que

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b) le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

2) factoriser $P(x)$ dans ce cas

Exercice15 : Soit : $P(x) = x^3 - 3x + 2$

1)a)calculer $P(1)$ et déterminer $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x-1)Q(x)$$

b)verifier que $P(x) = (x+2)(x-1)^2$

2)soit α un réel tel que : $1 < \alpha < 2$

Donner un encadrement de $\alpha + 2$ et de : $(\alpha - 1)^2$

Et en déduire que : $0 < P(\alpha) < 4$

Exercice16 : Soit : $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$

1) verifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2)montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$

Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) verifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) en Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$

Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x - 2)Q(x)$$

5) en déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

6) déterminer les réels $a ; b ; c$ tel que :

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$$

7) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

